Geometria piana

Sara Pinto

19 agosto 2026

La teoria e gli esercizi sono tratti da “Geometria piana per le gare di matematica”, Carlo Càssola, collana U Math, Scienza express, 2018.

1 Introduzione

Affrontare un problema di geometria non è sempre facile perché spesso ricorre scomporre il problema in sotto-problemi e cercare di ricavarsi una catena di verità che permettono di raggiungere la soluzione desiderata. Tra tutte le figure che ci si può trovare ad analizzare la più versatile e utile è quella del triangolo, la forma piana con il numero minimo di lati e angoli. In particolare ci soffermeremo su similitudini di triangoli, sui loro punti notevoli e sui qualche teorema e formula utile per affrontare un problema di geometria piana.

2 Ripasso di angoli e proprietà

Nella presente sezione verranno enunciati alcune delle proprietà principali degli angoli, ci si orienterà verso angoli con vertice giacente su una circonferenza.

Teorema 2.1. *Tutti gli angoli aventi vertice su una circonferenza che insistono sul medesimo arco sono congruenti fra loro e congruenti alla metà dell'angolo al centro che insiste su tale arco. Angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti sono fra loro congruenti.*

È importante osservare che lo stesso teorema in cui si scambia il termine "arco" con il termine "corda" non è più vero. Infatti, due angoli che insistono sulla stessa corda, ma aventi vertice sui due archi di circonferenza (identificati dagli estremi della corda) opposti sono supplementari e quindi non necessariamente congruenti.

Lemma 2.1. *Un angolo che insiste su un diametro è sempre retto.*

Da ciò, e dal fatto che per tre punti non allineati passa sempre una e una sola circonferenza, segue che ogni triangolo rettangolo non degenere è sempre inscrivibile in una semicirconferenza.

3 Similitudine tra triangoli

Cominciamo definendo cosa sia una similitudine tre due poligoni generici:

Teorema 3.1. *Due poligoni si dicono simili se hanno gli angoli ordinatamente congruenti e i lati ordinatamente in proporzione. Date due figure simili il rapporto fra due lati corrispondenti si dice* rapporto di similitudine.

Da questa definizione segue il seguente:

Lemma 3.1. *Tutti i poligoni regolari aventi un numero fissato di lati sono simili fra loro.*

Per i triangoli abbiamo diversi teoremi di similitudini:

Teorema 3.2 (Primo criterio di similitudini dei triangoli)**.** *Se due triangoli hanno due angoli congruenti, allora sono simili.*

Teorema 3.3 (Secondo criterio di similitudini dei triangoli)**.** *Se due triangoli hanno un angolo congruente e i lati ad esso adiacenti in proporzione, allora sono simili.*

Teorema 3.4 (Terzo criterio di similitudini dei triangoli)**.** *Se due triangoli hanno i lati in proporzione, allora sono simili.*

Un teorema interessante che vale per ogni triangolo coinvolge i punti medi di due dei suoi lati:

Teorema 3.5. *Congiungendo i punti medi M e N dei lati AB e BC di un triangolo ABC si ottiene il triangolo MNC, simile ad ABC, avente rapporto di similitudine $\frac{1}{2}$ con triangolo di partenza. Il segmento MN è parallelo ad AC perché forma angoli corrispondenti congruenti.*

Nella risoluzione dei problemi di geometria spesso torna utile saper identificare la presenza di triangoli rettangoli perché per questa classe di triangoli valgono i seguenti due teoremi:

Teorema 3.6 (Primo teorema di Euclide)**.** *In un triangolo rettangolo ciascun cateto è medio proporzionale fra la sua proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa.*
In un triangolo ABC con ipotenusa AB e altezza CH, H piede dell'altezza giacente su AB, valgono le seguenti formule: $CA^2 = AH \cdot AB$ e $CB^2 = HB \cdot AB$.

Teorema 3.7 (Secondo teorema di Euclide)**.** *In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale fra le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.*
In un triangolo ABC con ipotenusa AB e altezza CH, H piede dell'altezza giacente su AB, vale la seguente formula: $CH^2 = AH \cdot HB$.

Esempio 3.1. Su una circonferenza di diametro AB di centro O si fissi un punto qualunque D sulla circonferenza che non cada sugli estremi del diametro. Sia C la proiezione di D su AB. Dimostrare che:

a. OD è la media aritmetica di AC e BC;

b. DC è la media geometrica di AC e BC.

4 Punti notevoli di un triangolo

Una serie di teoremi assicura che, preso un triangolo generico, ciascun set di altezze, mediane, bisettrici e assi convergono ognuna in un punto in particolare:

- Le altezze concorrono in un punto chiamato *ortocentro*;
- Le mediane concorrono nel *baricentro*;
- Le bisettrici concorrono nell'*incentro*;
- Gli assi concorrono nel *circocentro*.

Da queste seguono i seguenti teoremi:

Teorema 4.1 (Teorema del baricentro)**.** *Il baricentro divide ciascuna mediana in due parti, di cui quella contenente il vertice è doppia dell'altra.*

Lemma 4.1. *Ogni mediana divide il triangolo in due triangoli tra loro equiestesi. Se si tracciano tutte le mediane di un triangolo queste lo dividono in sei triangoli equiestesi. Inoltre il baricentro divide ogni mediana in due parti di cui quella contenente il vertice di lunghezza doppia dell'altra.*

Esempio 4.1. Nel triangolo ABC la mediana uscente da A è perpendicolare a quella uscente da B. Se le lunghezze dei lati AC e BC sono rispettivamente 6 e 7, calcolare la lunghezza di AB.

Teorema 4.2 (Teorema della bisettrice)**.** *La bisettrice di ciascun angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in due segmenti proporzionali agli altri due lati.*

Riflettendo sulla definizione di incentro e circocentro si nota che: l'incentro è equidistante dai tre lati del triangolo, è quindi il centro della circonferenza inscritta nel triangolo; il circocentro è equidistante dai tre vertici del triangolo, è quindi il centro della circonferenza circoscritta al triangolo. Inoltre dal momento che per tre punti non allineati passa sempre una e una sola circonferenza, qualsiasi triangolo non degenere è inscrivibile in una circonferenza. Per quanto riguarda la posizione dei punti notevoli rispetto al triangolo vediamo il seguente lemma:

Lemma 4.2. *Il baricentro e l'incentro sono sempre interni al triangolo; l'ortocentro e il circocentro sono interni se il triangolo è acutangolo, esterni se è ottusangolo. Se il triangolo è rettangolo il circocentro è il punto medio dell'ipotenusa e l'ortocentro è il vertice dell'angolo retto. Per un triangolo equilatero tutti questi punti coincidono.*

Esempio 4.2. Dopo aver disegnato il quadrato $ABCD$ di lato unitario, si tracci una circonferenza di centro C e raggio uguale al lato del quadrato. Si indica poi con X l'intersezione tra la diagonale AC e la circonferenza, e con Y l'intersezione della retta DX con il lato AB. Quanto vale la lunghezza del segmento AY?

Esempio 4.3. Sia ABC un triangolo rettangolo di ipotenusa BC inscritto in una semicirconferenza di raggio r tale che AB ha lunghezza r. Sia D un punto sull'arco AC tale che, denotato E il punto di intersezione tra AD e BC, il segmento CE misuri anch'esso r. Trovare il minimo r intero per cui anche DC^2 è intero.

4.1 Circonferenza inscritta e circoscritta

Ci sono alcune formule utili per trovare il raggio delle circonferenze inscritta e circoscritta di un triangolo.

Lemma 4.3. *La lunghezza del raggio r della circonferenza inscritta in un triangolo equivale all'area divisa per il semiperimetro: $r = \frac{\mathcal{A}}{p}$.*

Lemma 4.4. *La lunghezza del raggio R della circonferenza circoscritta a un triangolo di lati a, b, c è dato dal prodotto delle lunghezze dei lati diviso per il quadruplo dell'area: $R = \frac{abc}{4\mathcal{A}}$.*

Esempio 4.4. Dato un triangolo isoscele ABC di base AB si calcolino le lunghezze dei raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta sapendo che la base misura 18 e l'altezza 12.